

数値近似解法のひとつの理論的裏付けに世界で初めて成功

研究成果のポイント

- ・修正ヘルムホルツ方程式(※1)という方程式の円領域上の場合について、基本解近似解法(※2)による近似解(※3)の存在と、真の解への指数的収束(※4)を示しました。
- ・今回の修正ヘルムホルツ方程式はノイマン型の境界条件(※5)が課されており、この問題に対する基本解近似解法の解の構成と、特に指数収束の数学的結果は世界初の結果です。
- ・この結果から、修正ヘルムホルツ方程式のノイマン問題に対する一般領域の場合における基本解近似解法の理論的裏付けが可能になることができると期待できます。また反応拡散系の一般領域に対する進行スポット解の運動の解析にも応用することができます。

研究成果の概要

公立はこだて未来大学の田中吉太郎准教授と九州大学の落合啓之教授、北海道大学の栄伸一郎教授の共同研究グループは、数値解析分野における一つの数値解法の理論的な裏付けをするのに成功しました。本グループは、円領域上の修正ヘルムホルツ方程式の近似解を基本解近似解法という方法を用いて構成し、真の解に指数的に収束することを示しました。今回の修正ヘルムホルツ方程式はノイマン型の境界条件が課されており、この問題に対する基本解近似解法の解の構成と、特に指数収束の数学的結果は世界初です。

(背景)

反応拡散系と呼ばれるある方程式の解の中には、形を一定に保ったまま伝搬できる進行スポット解と呼ばれる解があります。この解の運動が、領域の形状にどのような影響を受けるのかという問題は細胞生物学や非平衡化学の分野で興味をもたれている重要な研究課題です。

北海道大学の栄伸一郎教授は、領域内部のスポット解の運動と領域の形状の関係を、運動方程式の形で導出することにより明らかにしました。しかし、この運動方程式を解くためには、修正ヘルムホルツ方程式と呼ばれる方程式の解が必要であり、この解の存在自体はわかっていたものの、特定の領域を除いて、この解の表示式は求められていませんでした。この問題がJST未解決問題ワークショップに出題され、これがきっかけで共同研究が始まりました。(※関連HP)

数値解析の分野では偏微分方程式の解を計算機で近似的に求めるさまざまな数値解法の研究が行われています。有名な数値解法に差分法や有限要素法があります。これらの解法は領域をメッシュと呼ばれる細かい領域に分けて、近似解をもとめていきます。その近似解の精度はメッシュの大きさの逆数の冪乗になることが知られています。一方、基本解近似解法は、後述する選点(図1)の数に依存して、近似解が真の解に指数的に近くことが知られています。しかし、この近似精度の理論的な裏付けができる方程式の種類は少なく、これまで基本解近似解法の理論的裏付けは、ディリクレ境界条

件という境界条件が課された方程式で行われていました。

(研究手法)

これらの2つの背景を踏まえて、本研究チームは、基本解近似解法による修正ヘルム方程式の近似解の存在と収束を理論的立証に試みました。基本解近似解法では、領域の外に選点(図1)と呼ばれる点を複数個用意し、基本解をその点にそれぞれ平行移動します。領域の境界上に拘束点(図1)という点を用意し、拘束点上で境界条件を満たすように基本解の線形和の係数を決めて近似解を構成します。基本解近似解法では、円領域で近似解を構成した後、その結果は様々な領域に拡張されているので、本研究チームは第1段階として円領域の場合について考察しました。

(研究成果)

修正ヘルム方程式の円領域のノイマン問題において、基本解近似解法によって理論的に近似解が構成できること、またこの近似解が、厳密解に指数的に収束することを示すことに成功しました。図2は厳密解への収束を数値的にしらべた数値計算結果です。これにより、ある条件下における正確な解と近似解の間の誤差を事前に推定することが可能となりました。また今回の結果は修正ヘルムホルツ方程式であれば、多くのノイマン境界条件にも適用が可能です。

(今後の展望)

今後、今回の研究で得られた近似解を用いて、円以外の領域上の修正ヘルムホルツ方程式に対する近似解を構成したり、様々な形状の領域内部の進行スポット解の挙動を数理的に解析したりすることができると考えられます。この数理解析から、一つの細胞内にある局在化したタンパク質やシグナルの挙動を予測したり、一つの閉じた領域で自律的に動き回る粒子の運動の領域形状からの影響を調べたりすることができると考えています。

論文発表の概要

研究論文名：Method of fundamental solutions for Neumann problems of the modified Helmholtz equation in disk domains

著者：氏名(所属) 柴伸一郎¹、落合啓之²、田中吉太郎³、

公表雑誌：*Journal of Computational and Applied Mathematics* 402 (2022) 113795

¹北海道大学大学院理学研究院、²九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所、³はこだて未来大学 システム情報科学部、

公表日：日本時間(現地時間) 2021年9月20日(オンライン版に掲載)

画像

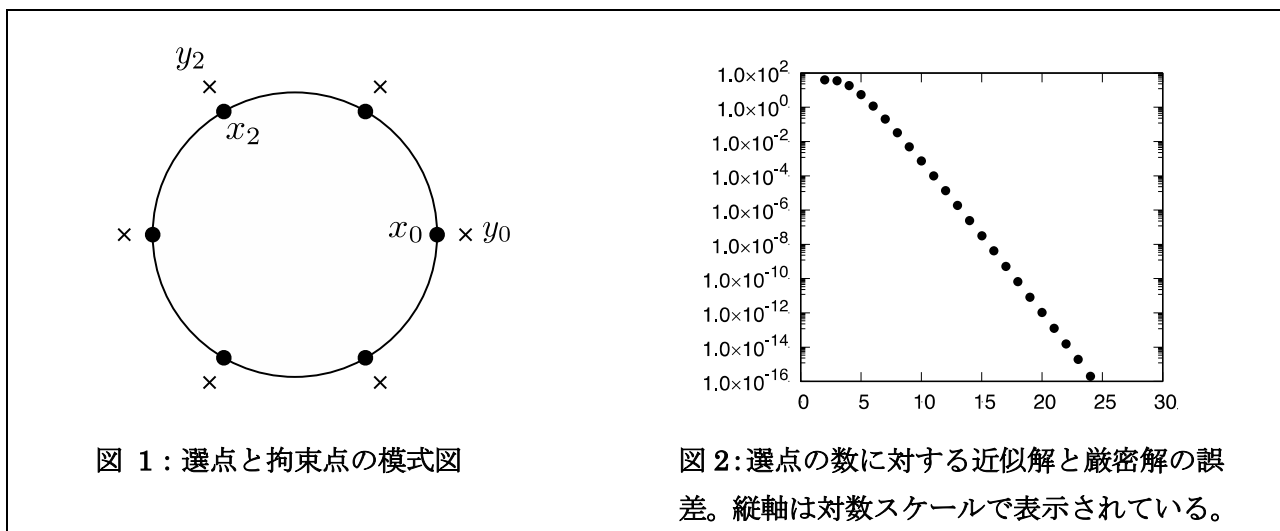


図 1: 選点と拘束点の模式図

図 2: 選点の数に対する近似解と厳密解の誤差。縦軸は対数スケールで表示されている。

【関連 HP】

「JST 数学領域 未解決問題ワークショップ」

<https://www.jst.go.jp/report/2021/211206.html>

【用語説明】

※1 修正ヘルムホルツ方程式

偏微分方程式の一つ。未知変数を u とし、 α を定数とすると、 $\Delta u - \alpha u = 0$ で与えられます。 Δ はラプラシアンと呼ばれる微分演算子です。

※2 基本解近似解法

有界領域上の偏微分方程式に対して、その偏微分方程式の基本解という解を用いて近似解を構成する方法の一つです。

※3 近似解

方程式の真の解ではないが、真の解に近い解のことです。

※4 偏微分方程式の数値解法に差分法や有限要素法などがありますが、これらの解法は、空間の格子数（メッシュ数）に対して、格子数の冪乗の逆数等のオーダーで収束することが知られています。基本解近似解法の指数的収束はこのオーダーよりも圧倒的に早く、つまり近似の精度が圧倒的に良いことを意味します。

※5 ノイマン型境界条件

境界上で未知変数の導関数に値を課す条件のことです。

お問い合わせ先:

(研究に関すること)

所属・職・氏名：公立はこだて未来大学 准教授 田中吉太郎

掲載する連絡先 (TEL FAX E-mail 研究室ホームページ)

TEL : 0138-34-6414 E-mail : y-tanaka@fun.ac.jp

ホームページ : <https://www.fun.ac.jp/faculty/tanaka-yoshitaro>

(報道に関すること)

公立大学法人公立はこだて未来大学 企画総務課

TEL 0138-34-6448 FAX 0138-34-6470

E-mail : a-dm@fun.ac.jp

国立大学法人九州大学 広報室

TEL 092-802-2130 FAX 092-802-2139

E-mail : koho@jimukyushu-u.ac.jp

国立大学法人北海道大学 総務企画部広報課

TEL 011-706-2610 FAX 011-706-2092

E-mail : jp-press@general.hokudai.ac.jp