九州大学
KYUSHU UNIVERSITY

PRESS RELEASE（2024/10/04）

黄金比・黄金角による点群生成機構の解明・一般化

～植物の形態モデリングに関わる数学の未解決問題を解決～

ポイント

① 自然界の形の研究として創始され、様々な分野で活用されている黄金比・黄金角を用いた点群生成法が、現代的な数理科学の知見により 200 年ぶりに大幅アップデート。

② 一般の曲面、3 次元以上のユークリッド空間を含む高次元構造に対し、より自由度の高い点群・メッシュ生成を行うことが可能に。

③ 自然界の形態を扱う数理モデリングや、偏微分方程式を用いた数値計算の基盤としての活用が期待される。

概要

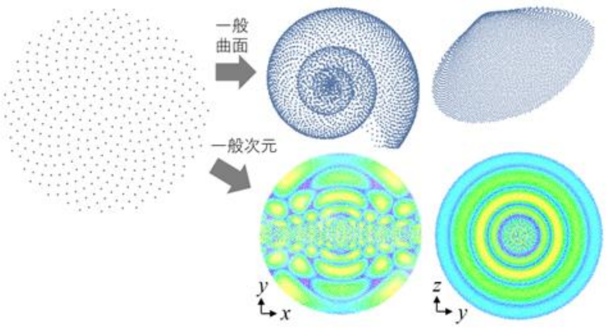
ひまわり頭部や松ぼっくりなどに見られる２重らせんのパターンの数理モデルを与えることが知られる黄金角の方法[※1] は、19 世紀に植物の形態モデリングの方法として提案されて以来、様々な回転体上の点群[※2]・メッシュ[※3] の生成法に用いられています。この植物にみられる現象から得られた黄金角の方法を一般化し、様々な対象に使えるようにすることは、数理科学およびサイエンスにまたがる問題として解決が要望されていました。

本学の研究でこの一般化がなされ、2 次元の一般曲面、3 次元以上のユークリッド空間を含む高次元構造に適用可能な点群・メッシュ生成法として、大幅にアップデートされました。

本研究は九州大学マス･フォア･インダストリ研究所の富安 亮子教授の研究に､九州大学の SENTAN-Q プログラムの支援で、数理学府博士課程の S. E. Graiff Zurita 氏がリサーチ・アシスタントとして参加し、ともに実施したものです。格子をこれまで用いられていたもの[※4] から、数の幾何（数論）のマルコフ理論[※5] で最適とされる、より無理数性の高い黄金格子[※6] に置き換えると、黄金角の方法で得られていたパッキング密度[※7] $\gtrsim\pi/2\sqrt{5}\fallingdotseq 0.702$の値を保ったまま、一般曲面に適用できることを発見しました。新規手法が一般曲面に適用できることの証明には、準線形双曲型と呼ばれる偏微分方程式の一般論が、高次元化には、マルコフ理論の高次元版である「斉次線形式の積[※8]」および微分幾何の「対角化可能計量[※9]」に関わる知見が用いられました。

今回の発見により、数論の新しい応用として得られた点群・メッシュ生成法は、性能と自由度が理論的に保証されるため、科学計算技術の改善に役立つことが期待されます。

本研究成果は米国の雑誌「Constructive Approximation」に 2024 年 9 月 30 日（月）（米国時間）に掲載されました。



研究者からひとこと：

「数学の応用には時間がかかる」と考える研究者は多いですが、19 世紀に始まった数の幾何のマルコフ理論と直交曲線座標に関する純粋数学の研究を結びつけた新規応用を与えることができました。今後も数学の応用の突破口になる社会実装を進める所存です。

【研究の背景と経緯】

黄金角の方法は、松ぼっくりやひまわり頭部などに見られる 2 重らせんの数理モデルとして知られ（**図 1**)、回転対称を持つ曲面（回転体表面）上に均一に分布した点群を容易に得る方法として用いられています。同様のパターンは植物の茎上における葉の元になる組織（原基）の分布に見られ、19 世紀には、フィボナッチ数の比を用いて葉の分布（葉序）を記述するシンパー - ブラウンの法則[※10]として知られていました。ブラベー兄弟はフィボナッチ数の比を黄金比に変更することを提案し、黄金角を用いた定式を与えました。結晶格子に名を残すブラベーの議論は連分数[※11]に基づく数学的なものです。

黄金角の方法は、植物と数学の神秘的なつながりを示す代表的な例で、数学誌でも何度も紹介されています。しかし、植物に端を発する科学の話題であるため、20 世紀以降の数学者が行う厳密な形で議論されたことがなかったのかもしれません。黄金角の方法は回転対称を持たない曲面にしか適用されたことがなく、その一般化は未解決問題として提起されていました(Lodkin, 2019; Akiyama, 2020)。

こういった状況から本学の富安亮子教授は 2017 年頃、黄金角の方法において仮定されている条件を数学の言葉で明確にすることから研究を開始しました。その過程で、数の幾何（数論）の 2 変数不定値 2 次形式[※5]に関するマルコフ理論との関連が見つかりましたが（**図 2**)、黄金角の現象がマルコフ理論と関連することは別のグループにより先に報告されています(Bergeron & Reutenauer, 2019)。

2020 年からの 1 年間は、留学生と教員の共同研究を促進する SENTAN-Q プログラムの支援で、本学博士課程 1 年の Sebastian Elias Graiff Zurita 氏が本研究に参加し、コロナ禍のため多くの議論をオンラインでも行いました。

【研究の内容と成果】

本研究は、マルコフ理論に関わる詳細な代数的な議論を進めることで、黄金角の方法の一般化に必要な問題設定を定式化し、必要な理論を、数論を含む代数と微分幾何・解析の知見を用いて完成させることで、点群生成法としての全貌を明らかにしたものです。論文は当該分野の第一人者である E. B. Saff 氏が編集長を務めるジャーナル Constructive Approximation から出版されます。

黄金角の方法は、「2 次元格子」と呼ばれるものの中でも特殊な、平面上の点の規則的な配置を写像する方法としても解釈できます。しかし中心的に用いられてきた 2 次元格子は、マルコフ理論において「最適」とされる 2 次元格子と異なり、それも一般化の障害になっていたことが分かりました。「最適」とされる「黄金格子」と呼ばれる 2 次元格子を代わりに用いることは、図 3 に示すように点群を均一分布させ、回転体において知られるパッキング密度$\gtrsim \pi/2\sqrt{5} \fallingdotseq 0.702$を一般曲面で達成するために必要となります。

得られた手法を用いた数値計算においては、らせん模様の大域的な接続に生じる障害を克服し、実効性を有する点群生成法として確立しました。格子をこれまで用いられていたものから黄金格子に置き換えると、無理数のパラメータが増えるため、境界でらせん模様を張り合わせる際に制御する必要が生じますが、連分数展開による無理数の近似[※12]により、見た目に分からない程度の誤差として回避する方法が考案されました（**図 3**(ii), (iii), (v)が使用例）。

黄金角の高次元化には、様々な方針が考えられますが、自然かつ最も一般的と考えられる条件を新規に与え、マルコフ理論の高次元化のための研究として実施された「斉次線形式の積」に関する数の幾何と、微分幾何における「多様体の対角化可能計量」の議論を組み合わせればよいことを明らかにしました。特に 3 次元では $(n_1 + n_2 \cos(2\pi/7) + n_3 \cos(4\pi/7), n_1 + n_2 \cos(4\pi/7) + n_3 \cos(8\pi/7), n_1 + n_2 \cos(8\pi/7) + n_3 \cos(2\pi/7))$（$n_i$: 整数)の形の座標点が定める格子に相似なものが最適(Davenport,

1938)で、パッキング密度は$\approx\sqrt{3}\pi/14 \fallingdotseq 0.389$となります（**図 4**）。

メッシュ生成の方法として、等角写像[※13]を用いた方法が知られています。黄金角・等角写像を用いたいずれの方法も特殊な格子と写像の性質を利用しており、点群をメッシュに変換することは比較的容易に行うことができるため、一般化された黄金角の方法は、等角写像の方法に類した手法ととらえることができます。新たに得られた方法では、メッシュの大きさを均一にする等面積メッシュ[※14]なら、等角写像の場合と比較してn次元で制約条件の数が$n-2$次元分、メッシュの大きさが変化してよいのであれば制約条件が$n-1$次元分減少するため、これまで等角写像を用いた方法が適用できなかった多様体上の点群・メッシュ生成にも適用でき、より高い自由度を持ちます。適用するために必要とされる条件は「対角化可能計量」を持つことで、これは一般の曲面・3 次元多様体・一般次元のユークリッド空間を含む幅広い対象になります。

【今後の展開】

本研究は JST 創発的研究支援事業に採択されており、本成果を用いた点群・メッシュ生成法は、今後、サイエンスへの応用と社会実装のための研究が予定されています。本研究には数論を含む様々な純粋数学の理論が用いられましたが、とりわけ数論は、数学に内在する動機のみから多くの研究が進められる分野であるにもかかわらず、様々な応用が見つかることは、数論の不合理な有効性（The Unreasonable Effectiveness Of Number Theory）と言われることさえあります。今回発見された応用から、応用を進展させるための新たな未解決問題が生まれ、数理科学の発展に関わることが期待されます。他方、黄金角の方法は生物に由来し、サイエンスにおいてもしばしば議論される話題のため、数学側が分かりやすいアウトプットを行っていく必要もあると考えています。

【参考図】

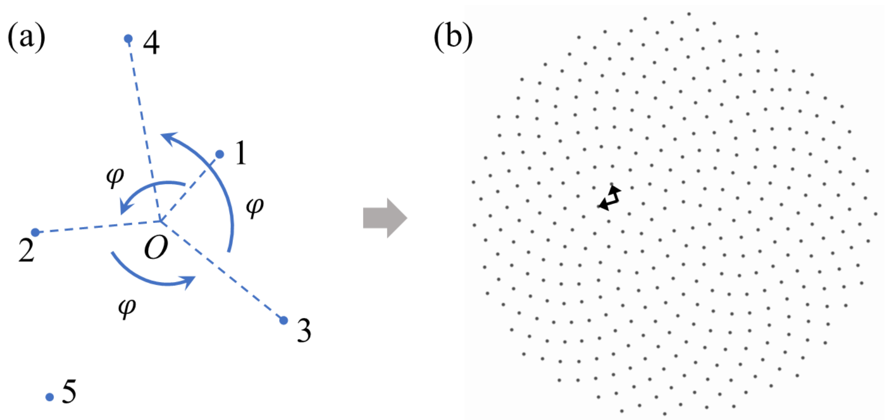


図 1　黄金角の方法の概要(a)とフォーゲル螺旋(※1 も参照)。黄金角の方法で生成された点群に見られる 2 重らせんを矢印の向きで示す。

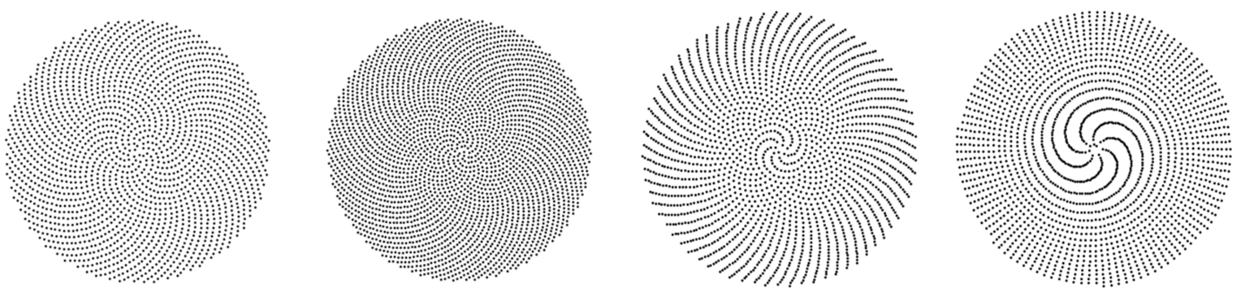


図 2　左から順に黄金比の次、その次に高いパッキング密度となる白銀比$1+\sqrt{2}$と$\left(9+\sqrt{221}\right)/10$の場

合（密度$\gtrsim \pi/4\sqrt{2} \fallingdotseq 0.555$, $\gtrsim 5\pi/2\sqrt{221} \fallingdotseq 0.528$）、$\pi$, e を用いた場合のフォーゲル螺旋。

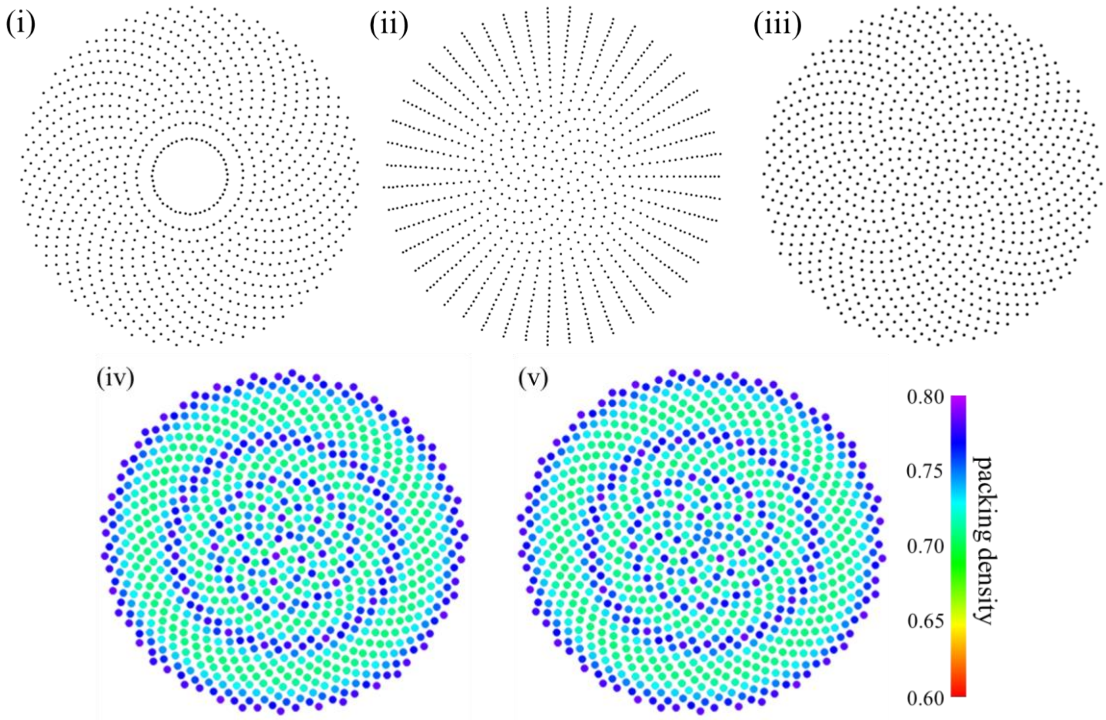


図 3　(i), (ii), (iv)は既存手法、(iii), (v)は提案手法による。フォーゲル螺旋では中心点付近を除きほとんど同じだが、他の写像を用いると(i)—(ii)のように均一にならないことが一般化の障害であった。パッキング密度で点群を着色。

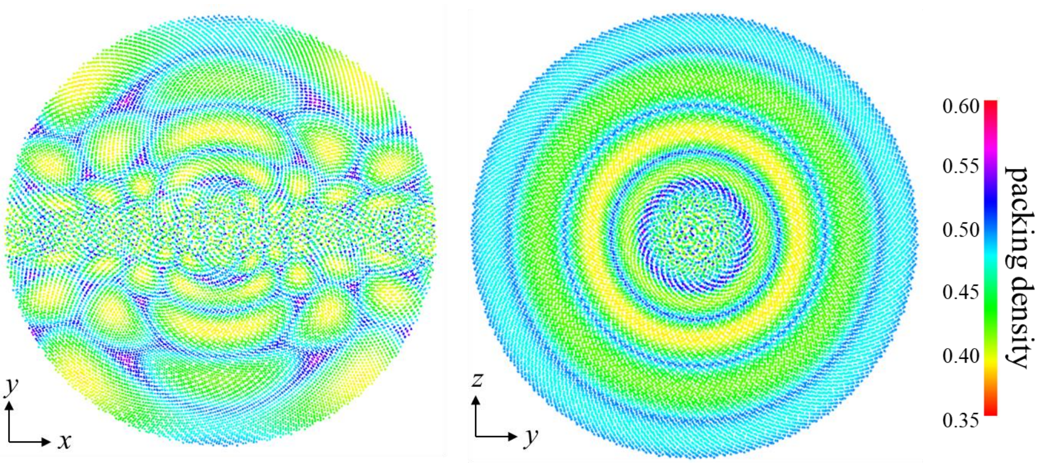


図 4　3 次元球体における点群生成。断面図を示す。パッキング密度で点群を着色。

【用語解説】

(※1）黄金角の方法

円周率 2π を 1：$(1+\sqrt{5})/2$（黄金比）に分割して得られる小さい方の角度。すなわち、$\varphi = 4\pi/(3+\sqrt{5}) \fallingdotseq 137.5$度が黄金角。黄金角ずつ回転させながら、単位面積当たりの点の数が一定となるよう(※7 も参照)回転中心からの距離を調整して点群を配置する方法を黄金角の方法という。例えば、円盤の面積が点数nに比例するように取る場合、円盤の半径は$\sqrt{n}$に比例するので、円盤状に点群を生成するフォーゲル螺旋の式は$(\sqrt{n}\cos\varphi, \sqrt{n}\sin\varphi)$となる。

(※2）点群
空間中の座標点の集合。3 次元の物体の形態を表す近似的な表現法として利用される。例えば 3D スキャナなどを用いて点群の情報が取得される。

(※3）メッシュ生成
多角形・多面体を用いて曲面・3 次元物体を近似的に表現すること。現象を表す数理モデル（偏微分方程式）を離散化し数値計算を行うために用いられる。メッシュの品質は、数値計算の精度や計算時間に影響する。

(※4）黄金角の方法で主に用いられてきた 2 次元格子
2 次元格子とは、ある実数a, b, c, dに対し、$(n_1 a + n_2 b, n_1 c + n_2 d)$（$n_1, n_2$: 整数)の形に表される無限個の座標点からなる点群で、すべての点がある直線上に載らないものを指す。黄金角の方法で得られる点群は、2 次元格子をある写像で写したものとみなすことが可能だが、$\left(n_1 + n_2\left(3-\sqrt{5}\right)/2, n_2 d\right)$の形の格子が最も多く用いられる。$d \neq 0$の値に関わらず、適当な写像を取れば、同じような 2 重らせん模様が得られる。

(※5) 2 変数不定値 2 次形式、マルコフ理論
2 次式 $f(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2)(cx_1 + dx_2)$（$a, b, c, d$: 実数)を 2 変数不定値 2 次形式という。マルコフ理論は、(x_1, x_2)が原点を除く整数値を動いたときに大きな最小値をとる$f(x_1, x_2)$に関する詳細なリストを与える。

(※6）黄金格子
(※5)に述べた max-min 問題の解として、ある$f(x_1, x_2)$がどの程度良いものであるかの指標となる目的関数の値は、(※7)のパッキング密度に対応し、連分数展開を用いて計算できる。最も良い値を取る$f(x_1, x_2) = \left(x_1 + x_2\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right)\left(x_1 + x_2\left(1-\sqrt{5}\right)/2\right)$は、黄金格子$\left(n_1 + n_2\left(1+\sqrt{5}\right)/2, n_1 + n_2\left(1-\sqrt{5}\right)/2\right)$に対応する。

(※7）パッキング密度
点群が均一に分布していることの指標となる 0--1 の範囲の数値。点群中の各点を中心とし、最も近い 2 点の距離を直径とする円・球が全体の中で占める体積の割合に等しい。1 に近いほど均一性が高い。

(※8）斉次線形式の積
斉次線形式 $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$（$a_{in}$: 実数)の積 $\prod_{i=1}^{n}(a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n)$ のこと。(※5)の 2 変数不定値 2 次形式は、$n = 2$ の場合にあたる。

(※9）多様体の対角化可能計量
この場合の「多様体」は、ユークリッド空間$\mathbb{R}^n$の一部を切り取り、張り合わせることで得られる幾何学的な構造で、さらに計量（距離）が定義されているものを指す。そのような多様体が対角化可能計量を持つとは、$\mathbb{R}^n$のように、互いに垂直に交わるn個の軸からなる座標系を取れることにあたる。

(※10）シンパー・ブラウンの法則
茎を円柱とみなして真上からみると、円周上に葉が分布するとみなすことができる。円の中心から見

て、n番目の葉が出た座標とn+1 番目の葉が出た座標がなす角度を「開度」といい、開度が定数になる葉序を「螺旋葉序」という。螺旋葉序で「開度と 2π の比が、フィボナッチ数列$\{F_n\} = \{1, 1, 2,3,5,8, \cdots\}$の比$F_n : F_{n+2} \fallingdotseq 1 : (3 + \sqrt{5})/2$に近い値となる植物が多く見られる」という植物学で見いだされた法則。

(※11) 連分数
すべての実数は整数列$a_0, a_1, a_2 \cdots$を用いて、$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$ の形に表すことができる。$a_k = 1$（$k = 0, 1, \cdots$)とすれば黄金比、$a_k = 2$とすれば白銀比に収束する。

(※12)連分数展開による無理数の近似
ディオファントス近似と呼ばれる分野で詳細な結果が知られている。

(※13) 等角写像
写像後もベクトルが交わる角度が変わらず、したがって微小領域では相似変換によって近似できる写像のこと。大学では複素平面上の「正則写像」として習うことが多い。共形写像とも。

(※14) 等面積メッシュ
メッシュの多角形・多面体の面積・体積が、座標によってあまり変化しないメッシュを指す。

【謝辞】
本研究は JST 未来社会事業（JPMJMI18GD)、JSPS 科研費 （19K03628)、九州大学の教員研修プログラム SENTAN-Q （2020--2021)、JST 創発的研究支援事業（JPMJFR2132）の助成を受けました。

【論文情報】
掲載誌：Constructive Approximation
タイトル：Packing theory derived from phyllotaxis and products of linear forms
著者名：S. E. Graiff Zurita & R. Oishi-Tomiyasu
Ｄ Ｏ Ｉ ：10.1007/s00365-024-09691-3

【お問合せ先】
＜研究に関すること＞
九州大学　マス・フォア・インダストリ研究所　教授　富安　亮子（トミヤス　リョウコ）
TEL：092-802-4450
Mail：tomiyasu@imi.kyushu-u.ac.jp

＜報道に関すること＞
九州大学　広報課
TEL：092-802-2130　FAX：092-802-2139
Mail：koho@jimu.kyushu-u.ac.jp